

Часть 1 “Дифференциальная геометрия”

Определение 1. Гладкое многообразие \mathcal{M} — это множество точек P , покрытое пересекающимися окрестностями (*картами*), на каждой из которых можно ввести координаты (однозначные на данной окрестности функции точки $P \in \mathcal{M}$ со значениями в \mathbb{R}^n). Координаты точек, принадлежащих двум пересекающимся окрестностям связаны гладкой заменой: $x_{(1)}^i(P) = f_{(12)}^i(x_{(2)}^j(P))$, при этом $f_{(12)}^i$ называются функциями переклейки.

Пример. Двумерная сфера S^2 — гладкое многообразие. Его можно покрыть двумя окрестностями — покрывающими северное и южное полушария. Отображение каждой окрестности в \mathbb{R}^2 можно задать, например, центральной проекцией из противоположного полюса. Функция переклейки на экваторе дается тождественным отображением.

Задача 1 (1). Покажите, что следующие множества можно рассматривать как гладкие многообразия. Введите карты, найдите функции переклейки:

1. Трехмерная сфера S^3 .
2. Множество прямых, проходящих через начало координат в \mathbb{R}^3 . Это множество можно также рассматривать как фактор-пространство: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}/\mathbf{x} \simeq \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Это многообразие называется $\mathbb{R}P^2$.
3. Множество комплексных прямых, проходящих через начало координат в \mathbb{C}^2 . Это множество можно также рассматривать как фактор-пространство: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2\}/\mathbf{x} \simeq \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это многообразие называется $\mathbb{C}P^1$ или просто \mathbb{P}^1 .
4. Группа $SU(2) = \{U \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = 1, \det U = 1\}$. Сравните с многообразием из п. 1.

Задача 2 (2). Понятие карт и функций переклейки встречается также в калибровочных теориях. Пусть на сфере S^2 имеется постоянное магнитное поле, нормальное к ее поверхности, причем полный магнитный поток сквозь сферу равен $\frac{2\pi}{q}$ (q — элементарный заряд). Покажите, что невозможно ввести несингулярный векторный потенциал для такого магнитного поля на всей сфере. Введите *два* несингулярных векторных потенциала: A_N на северном полушарии и A_S на южном (аналоги карт). Покажите, что два потенциала связаны между собой на экваторе калибровочным преобразованием с калибровочной функцией $\alpha(\phi)$ (аналог функции переклейки). Покажите, что $e^{iq\alpha(\phi)}$ (но не сама $\alpha(\phi)$) является однозначной функцией точки на экваторе. Найдите $\alpha(2\pi) - \alpha(0)$.

Задача 3 (1). При каких значениях μ множество точек в \mathbb{R}^2 , удовлетворяющих уравнению $x^2 - y^2 = \mu$, является многообразием?

Определение 2. Вещественным скалярным полем на многообразии называется функция точки многообразия, принимающая значения в \mathbb{R} .

Задача 4 (1). Поскольку на данной карте a координаты $x_{(a)}^i(P)$ однозначно определяют точку P многообразия, то можно считать скалярное поле функцией от координат $\phi_a(x_{(a)}^i)$. Пусть окрестности a и b пересекаются и функция переклейки равна $f_{(ab)}$.

Используя тот факт, что скалярное поле в действительности является функцией точки многообразия, определить как связаны функции $\phi_{(a)}(x_{(a)}^i)$ и $\phi_{(b)}(x_{(b)}^i)$.

Определение 3. Векторным полем на многообразии называется зависящий от точки многообразия дифференциальный оператор первого порядка $\mathbf{v}(P) = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$. $v^i(x)$ называются компонентами векторного поля. Множество векторных полей на данном многообразии \mathcal{M} обозначается $T\mathcal{M}$. Векторные поля действуют на скалярные поля как дифференциальные операторы.

Задача 5 (1). Пользуясь тем фактом, что выражение для дифференциального оператора \mathbf{v} справедливо на всех картах многообразия, найдите закон преобразования компонент вектора v^i при переходе с одной карты на другую.

Задача 6 (1). Пусть компоненты вектора v в точке $(3, 4)$ в ортогональной системе координат в \mathbb{R}^2 равны $(1, 2)$. Найдите его компоненты в полярной системе координат.

Задача 7 (1). Покажите, что коммутатор двух векторных полей является векторным полем. Найдите его компоненты.

Задача 8 (1). Покажите, что множество всех векторов в фиксированной точке P многообразия \mathcal{M} является векторным пространством (касательное пространство к многообразию \mathcal{M} в точке P , обозначается $T_P\mathcal{M}$). Найти размерность этого векторного пространства.

Определение 4. Контравариантным тензором ранга k называют линейную комбинацию тензорных произведений k векторных полей: $\mathbf{v}_{(k)}(P) = v^{i_1 \dots i_k}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$, причем коэффициенты $v^{i_1 \dots i_k}$ называются компонентами тензора. Множество контравариантных тензорных полей на многообразии \mathcal{M} обозначается $T^{\otimes k}\mathcal{M}$.

Задача 9 (1). Пользуясь тем фактом, что выражение для тензора $\mathbf{v}_{(k)}$ справедливо на всех картах многообразия, найдите закон преобразования компонент тензора $v^{i_1 \dots i_k}$ при переходе с одной карты на другую.

Задача 10 (1). Пусть V — векторное пространство, F — вещественная линейная функция из V в \mathbb{R} (линейная форма), т.е. $F : V \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть в V имеется базис \mathbf{e}_i . Компонентами линейной формы F называется набор чисел $\{F(\mathbf{e}_i)\}$. Найти закон преобразования компонент линейной формы. Сравнить с законом преобразования компонент вектора.

Определение 5. Пространство линейных форм на векторном пространстве V называется сопряженным пространством и обозначается V^* . Сопряженное к касательному пространству $T_P\mathcal{M}$ многообразия \mathcal{M} в точке P называется кокасательным пространством и обозначается $T_P^*\mathcal{M}$. Элементы кокасательного пространства называются ковариантными векторами, ковекторами, или 1-формами. В частности, дифференциал функции $df(P) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i$ является ковектором — его значение на векторе $v(P) = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ равно $(df)(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{v}, df \rangle = \mathbf{v}f = v^i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$.

Задача 11 (1). Найти закон преобразования компонент дифференциала $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\}$ при замене координат. Сравнить с законом преобразования векторного поля.

Определение 6. Тензорным полем типа (n, m) на многообразии¹ называется объект, компоненты которого в координатах имеют вид $T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}(x)$ и при замене координат

¹Всюду многообразия предполагаются достаточно гладкими — функции переклейки дифференцируемы нужное число раз.

преобразуются по закону $T_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_m}^{i_1 \dots i_n}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{i_n}}{\partial x^{k_n}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_1}} \dots \frac{\partial x^{l_m}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_m}} T_{l_1 \dots l_m}^{k_1 \dots k_n}(x)$. Скалярное поле — это тензорное поле типа $(0, 0)$, векторное поле — поле типа $(1, 0)$, поле 1-форм — поле типа $(0, 1)$. Верхние индексы называются контравариантными, нижние — ковариантными. Тензоры типа (n, m) на d -мерном многообразии образуют линейное пространство размерности d^{m+n} .

Задача 12 (1). а) Покажите, что верхние и нижние индексы тензора можно *сворачивать*, и при этом снова получается тензор, например T_i^i — тензор типа $(0, 0)$.

б) Покажите, что тензорное произведение векторов — тензор. Найдите его компоненты.

в) Покажите, что при перестановке индексов одного типа (например, только верхних), тензор остается тензором. Можно ли переставлять индексы разного типа (верхние и нижние)?

г) Покажите, что частная производная тензора, вообще говоря, не есть тензор. То есть если $T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ — тензор, то $S_{j_1 \dots j_{m+1}}^{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} T_{j_2 \dots j_{m+1}}^{i_1 \dots i_n}$ тензором не является.

Задача 13 (1). а) Покажите, что δ_j^i является тензором типа $(1, 1)$, а δ_{ij} не является тензором типа $(0, 2)$

б) Пусть a^{ij} — тензор типа $(2, 0)$. Показать, что числа b_{ij} , удовлетворяющие условию $a^{ij}b_{jk} = \delta_k^i$, образуют тензор типа $(0, 2)$.

в) Пусть a_{ij} — тензор типа $(0, 2)$. Пусть оно невырождено, тогда существует обратная матрица к матрице $A = (a_{ij})$, обозначим её элементы как a^{ij} , $a_{ik}a^{kj} = \delta_j^i$. Рассмотрим объекты $a_{\alpha i_1} T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ и $a^{\alpha j_1} T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$. Являются ли они тензорами? какого типа?

г) Является ли $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ тензором на n -мерном многообразии?

Задача 14 (1). а) Доказать, что если тензор T_{ijk} симметричен по первым двум индексам и антисимметричен по второму и третьему, то он равен нулю.

б) Доказать, что если a_{ij} — симметрический, b^{ij} — антисимметрический тензоры, то $a_{ij}b^{ij} = 0$.

Определение 7. Будем говорить, что на многообразии задана *метрика*, если любому ненулевому вектору в любой точке многообразия, $\mathbf{v}(P)$, можно сопоставить положительное число $g(P|\mathbf{v}(P), \mathbf{v}(P))$ — квадрат его длины — причем функция $g(P|\mathbf{v}, \mathbf{w})$ линейна по \mathbf{v} и \mathbf{w} . Иными словами, на касательном пространстве к каждой точке многообразия задана билинейная симметрическая положительно-определенная форма. Многообразию с метрикой называется *римановым* многообразием.²

Задача 15 (0.5). а) Покажите, что в координатной карте метрику можно записать как $g(P|\mathbf{v}(P), \mathbf{w}(P)) = g_{ij}(x)v^i(x)w^j(x)$. Матрица g_{ij} называется матрицей компонент метрики. Найдите закон преобразования компонент метрики при замене координат. Является ли метрика тензором? Покажите, что для каждой

²В общей теории относительности используются *псевдоримановы* многообразия. Они отличаются от римановых тем, что квадрат длины вектора может быть как положительным так и отрицательным.

точки многообразия всегда существует такой выбор координат, что матрица компонент метрики — единичная.

- б) Если в некоторых координатах матрица компонент единичная в *каждой* точке многообразия, то метрика называется *плоской*. Такие координаты называют плоскими. Многообразие, на котором можно ввести плоскую метрику также называется плоским. Покажите, что \mathbb{R}^n , окружность S^1 и тор $S^1 \times S^1$ являются плоскими.

Задача 16 (0.5). Пусть сфера задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в \mathbb{R}^3 , причем x, y, z — плоские координаты. Сопоставим вектору \mathbf{v} , касательному к сфере, квадрат его длины в \mathbb{R}^3 . Найдите компоненты полученной таким образом метрики.

Задача 17 (1). а) Покажите, что индексы тензора можно *поднимать* и *опускать* с помощью метрики, например $T_j^i g^{jk}$ — тензор типа (2, 0).

- б) Покажите, что $g(x)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{i_1 \dots i_n}$, где $g = \det g_{ij}$, являются компонентами тензора на n -мерном многообразии.

Определение 8. Определим *связность* или *параллельный перенос* вектора $\mathbf{v}(P)$ из точки P на вектор \mathbf{w} как оператор $\Gamma_{\mathbf{w}}$, линейный по \mathbf{w} и дающий вектор $\mathbf{v}_{\text{trans}}(P + \mathbf{w}) = \Gamma_{\mathbf{w}}(P)\mathbf{v}(P)$. Ковариантная производная векторного поля \mathbf{v} определяется как $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(P + \mathbf{w}) - \mathbf{v}_{\text{trans}}(P + \mathbf{w})$. Ковариантная производная действует на тензорное произведение векторов по правилу Лейбница: $\nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = (\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} + \mathbf{v} \otimes (\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u})$. Будем считать, что скалярное поле параллельно переносится без изменений, $\phi_{\text{trans}}(P + \mathbf{w}) = \phi(P)$

Задача 18 (1). Как записываются компоненты связности в координатах? Найдите закон преобразования компонент связности при замене координат, считая, что взятие ковариантной производной — тензорная операция.

Задача 19 (1). Пусть многообразие $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$. Докажите, что ковариантная производная является тензорной операцией. Являются ли тензором компоненты связности?

Определение 9. Связность Γ называется согласованной с метрикой, если $\nabla_i g_{jk} = 0$. Кручением связности Γ называется тензор $C_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$. Мы будем рассматривать только связности без кручения, согласованные с метрикой. Такие связности называются римановыми связностями.

Задача 20 (0.5). Покажите, что если в некоторых координатах компоненты связности равны нулю всюду на многообразии, то метрика плоская.

Задача 21 (1). Найдите выражение для компонент связности через компоненты метрики. Покажите, что

а) $\Gamma_{ji}^i = \partial_i \ln \sqrt{g}$,

б) $\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} v^i)$,

в) $\nabla_i \nabla^i \phi = \nabla_i g^{ij} \nabla_j \phi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j \phi$.

Задача 22 (1). Найдите компоненты ковариантной производной от скалярного поля, векторного поля. Покажите, что $\nabla_i \alpha_j - \nabla_j \alpha_i = \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i$, и вообще $\nabla_{[i} \omega_{jk \dots]} = \partial_{[i} \omega_{jk \dots]}$, где скобки обозначают антисимметризацию.

Задача 23 (1). Покажите, что $[\nabla_j, \nabla_k]v^i = R_{jkl}^i v^l$, причем R_{jkl}^i является тензором. Выразите компоненты этого тензора через компоненты связности.

Определение 10. R_{jkl}^i называется тензором *кривизны*, или тензором Римана.

Задача 24 (2). Покажите, что если $R_{jkl}^i = 0$ всюду на многообразии, то можно выбрать координаты так, что связность также равна нулю. Обратное, покажите, что если хотя бы где-то $R_{jkl}^i \neq 0$, то связность не может быть нулевой всюду.

Задача 25 (2). Покажите, что тензор $R_{ijkl} = g_{im}R_{jkl}^m$ имеет следующие симметрии:

- а) $R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl}$,
- б) $R_{ijkl} = R_{klij}$,
- в) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$. *Указание:* используйте тождество Якоби $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$, верное для любых операторов A, B, C .
- г) $\nabla_i R_{jkl}^m + \nabla_j R_{kil}^m + \nabla_k R_{ijl}^m = 0$.

Задача 26 (2). Рассмотрим действие для частицы в гравитационном поле, заданном метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$S = - \int \left(e^{-1}(\tau) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + m e(\tau) \right) d\tau \quad (1)$$

- а) Найдите уравнения движения для полей $x^\mu(\tau)$ и $e(\tau)$.
- б) Покажите, что действие инвариантно относительно замены координат $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu(x)$.
- в) Покажите, что действие инвариантно относительно репараметризации мировой линии частицы:

$$\tau \mapsto \tilde{\tau}(\tau), \quad (2)$$

$$e(\tau) \mapsto \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} e(\tilde{\tau}). \quad (3)$$

Выберите $\tilde{\tau}$ так, чтобы $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\tilde{\tau}} = 1$, и запишите уравнения движения в этой параметризации.

- г) Пусть компоненты $\Gamma_{00}^i = \partial_i \Phi$ малы, а остальные компоненты $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ равны нулю. Запишите уравнения движения в этом пределе. Сравните со вторым законом Ньютона. Каков физический смысл поля $\Phi(x)$?

Часть 2 “Введение в топологию”

1. Гомотопические группы.

Определение 11. Два отображения³ топологических пространств $f, g: M \rightarrow N$ называются *гомотопными* (будем писать $f \simeq g$), если существует отображение $F: M \times I \rightarrow N$, такое что $F|_{t=0} = f$, $F|_{t=1} = g$.

Определение 12. Два топологических пространства M и N называются гомотопными (будем писать $M \simeq N$), если существуют отображения $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow M$, такие что $g \circ f \simeq \text{id}_M$ и $f \circ g \simeq \text{id}_N$.

Задача 27 (0.5). Покажите, что кольцо, а также плоскость с выколотой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопны окружности. Покажите, что шар, а также плоскость \mathbb{R}^2 , гомотопны точке. Какие из букв латинского алфавита гомотопны друг другу?

Определение 13. Множество гомотопических классов отображений $f: I \rightarrow M$, таких что $f(0) = f(1) = P \in M$ называется *фундаментальной группой* пространства M и обозначается $\pi_1(M, P)$. Отображения в ней можно перемножать следующим образом

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

Задача 28 (1). Покажите, что умножение корректно определено на классах. Покажите, что для связного пространства фундаментальная группа в действительности не зависит от точки P (поэтому мы будем писать просто $\pi_1(M)$). Какой класс соответствует единице e в группе? Чему равен обратный элемент к классу отображения f ?

Задача 29 (1). а) Как повесить картину (на замкнутой веревке) на два гвоздя так, чтобы она упала, если убрать любой из гвоздей⁴?

б) То же для большего числа гвоздей.

в) Приведите пример пространства, в котором фундаментальная группа некоммутативна, т. е. $a * b \neq b * a$.

Задача 30 (0.5). Найдите $\pi_1(S^1)$, $\pi_1(S^1 \times S^1)$.

Задача 31 (1). Покажите, что $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$. Является ли $\mathbb{R}P^2$ ориентируемым? Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$.

Задача 32 (2). Найдите группу π_1 для замкнутой ориентируемой двумерной поверхности с тремя ручками (кренделя).

Определение 14. Множество гомотопических классов отображений гиперкуба $f: I^k \rightarrow M$, таких что $f|_{\partial I^k} = P$ называется *k-мерной гомотопической группой* пространства M и обозначается $\pi_k(M, P)$. Умножение отображений определяется

³Всюду, если не оговорено обратное, все отображения считаются непрерывными.

⁴Веревку можно использовать сколь угодно длинную.

следующим образом:

$$(f * g)(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_k), & 0 \leq t_1 < \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k), & \frac{1}{2} \leq t_1 < 1. \end{cases}$$

Задача 33 (1). Покажите, что умножение корректно определено на классах. Покажите, что для связного пространства k -мерная гомотопическая группа в действительности не зависит от точки P (поэтому мы будем писать просто $\pi_k(\mathcal{M})$). Какой класс соответствует единице e в группе? Чему равен обратный элемент к классу отображения f ? Покажите, что при $k > 1$ группы $\pi_k(\mathcal{M})$ коммутативны.

Задача 34 (1). Покажите, что $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$. Покажите, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

2. Фактор-пространства

Определение 15. Пусть группа G действует на пространстве \mathcal{X} без фиксированных точек. *Фактор-пространством* \mathcal{X}/G называется пространство орбит действия группы G , т. е. пространство классов $[P] = \{gP | g \in G\}$.

Задача 35 (1). Пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество прямых, проходящих через начало координат в $(n+1)$ -мерном пространстве \mathbb{R}^{n+1} . Покажите, явно что $\mathbb{R}P^1 = S^1$. Покажите также, что $\mathbb{R}P^1 = S^1/\mathbb{Z}_2$, где \mathbb{Z}_2 действует отражением относительно центра окружности. Покажите, что $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$.

Задача 36 (1). Пространство $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество *комплексных* прямых, проходящих через начало координат в $(n+1)$ -мерном *комплексном* пространстве \mathbb{C}^{n+1} . Покажите, явно что $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Покажите также, что $\mathbb{C}P^1 = S^3/U(1)$ и вообще $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/U(1)$.

Задача 37 (0.5). Найдите $\pi_{1,2,3}(SU(2))$.

Задача 38 (1). Покажите явно, что $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$. Найдите $\pi_{1,2,3}(SO(3))$. *Указание:* воспользуйтесь соответствием между точками сферы $S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) | x^k x^k = 1\}$ и антиэрмитовыми бесследовыми матрицами 2×2 с единичным детерминантом $M = ix^k \sigma^k$.

Задача 39 (2). Покажите явно, что $SO(4) = SU(2) \times SU(2)/\mathbb{Z}_2$. Найдите $\pi_{1,2,3}(SO(4))$. *Указание:* воспользуйтесь результатом задачи 37.

Задача 40 (3). Покажите явно, что $SO(6) = SU(4)/\mathbb{Z}_2$. Найдите $\pi_1(SO(6))$. *Указание:* воспользуйтесь соответствием между точками сферы S^5 и антисимметричными самодуальными комплексными 4×4 матрицами $\{A_{ij} | A_{ij} = -A_{ji}, A_{ij} = \epsilon_{ijkl} A_{kl}^*, A_{ij}^* A_{ij} = 1\}$.

Задача 41 (1). Покажите, что $SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$.

Задача 42 (1). Покажите, что $SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1}$.

Задача 43 (1). Покажите, что $Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$.

3. Расслоения. Длинная точная последовательность гомотопических групп. Стабилизация.

Определение 16. Расслоением называется набор (E, B, p) , состоящий из пространства E (*тотального пространства расслоения*), пространства B (*базы расслоения*)

и отображения $p: E \rightarrow B$ (проекции), такого что прообразы точек базы $F = p^{-1}(x)$ (слои) одинаковы для любого $x \in B$. $(B \times F, B, \text{id} \times 0)$ называется тривиальным расслоением. Над каждой картой базы любое расслоение является тривиальным, однако, вообще говоря, имеются функции переклейки слоев на пересечении карт. Сечением расслоения называется непрерывный выбор точки в каждом из слоев. Если слой расслоения является векторным пространством, то расслоение называется векторным; если слой является группой G , то расслоение называется главным G -расслоением.

Задача 44 (0.5). Ленту Мебиуса можно рассматривать как расслоение с базой S^1 и слоем I . Найдите функции переклейки. Покажите, что это расслоение нетривиально.

Рассмотрим границу ленты Мебиуса. Ее можно рассматривать как расслоение с базой S^1 и слоем, состоящим из двух точек. Найдите функции переклейки. Покажите, что расслоение нетривиально. Имеется ли у него хотя бы одно сечение?

Задача 45 (1). Покажите, что расслоение единичных касательных векторов к сфере S^2 не является тривиальным. *Указание:* от противного. Эквивалентно ли тотальное пространство этого расслоения сфере S^3 ?

Задача 46 (2). Рассмотрим расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ с тотальным пространством $E = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) / (z_1, z_2, z_3) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda^k z_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, базой $B = \mathbb{C}P^1$ и проекцией $p(z_1, z_2, z_3) = [(z_1, z_2)]$.

- а) Найдите функции переклейки.
- б) Покажите, что при обходе вокруг экватора $S^1 \subset \mathbb{C}P^1$ слой поворачивается на $2\pi k$.
- в) Покажите, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ не имеет ненулевых голоморфных сечений при $k < 0$. Найдите размерность пространства голоморфных сечений при $k \geq 0$. *Указание:* воспользуйтесь функциями переклейки.
- г) Покажите, что расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ нетривиально при $k \neq 0$. *Указание:* воспользуйтесь тем фактом, что единственная голоморфная функция на $\mathbb{C}P^1$ — константа.

Определение 17. Последовательность отображений⁵

$$\cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} C_3 \xrightarrow{f_3} C_4 \rightarrow \cdots$$

называется точной если $\text{im } f_k = \ker f_{k+1}$ для любого k .

Задача 47 (0.5). Покажите, что если последовательность $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ точная, что f — изоморфизм.

Задача 48 (0.5). Покажите, что если A, B, C — векторные пространства, и последовательность $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ точная, то $B = B_1 \oplus B_2$, причем $f: A \rightarrow B_1$ и $g: B_2 \rightarrow C$ — изоморфизмы.

Убедитесь, что для точной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ это неверно.

⁵Более точно, гомоморфизмов групп C_n .

Теорема 1. Если (E, B, p) — расслоение, то существует точная последовательность гомотопических групп:

$$\cdots \rightarrow \pi_k(F) \rightarrow \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B) \xrightarrow{h} \pi_{k-1}(F) \rightarrow \pi_{k-1}(E) \xrightarrow{p_*} \pi_{k-1}(B) \rightarrow \cdots$$

Задача 49 (2). Используя длинную точную последовательность гомотопических групп, покажите, что если G — конечная группа, то $\pi_k(X/G) = \pi_k(X)$ при $k \geq 2$. Покажите также, что если $\pi_1(X) = 0$, то $\pi_1(X/G) = G$.

Задача 50 (1). Используя длинную точную последовательность гомотопических групп и результаты задач 41, 42 и 43, покажите, что

1. $\pi_k(SO(n)) = \pi_k(SO(n-1))$ при $n > k + 2$,
2. $\pi_k(SU(n)) = \pi_k(SU(n-1))$ при $n > k/2 + 1$,
3. $\pi_k(Sp(n)) = \pi_k(Sp(n-1))$ при $n > k/4 + 1/2$,

Найдите $\pi_{1,2,3}(SO(n))$, $\pi_{1,2,3}(SU(n))$ и $\pi_{1,2,3}(Sp(n))$ для произвольных n .

Задача 51 (2). Используя длинную точную последовательность гомотопических групп и результат задачи 45, покажите, что $\pi_k(S^3) = \pi_k(S^2)$ для всех $k \geq 3$. Вычислите $\pi_3(S^2)$. Приведите пример нетривиального элемента из $\pi_3(S^2)$.

Задача 52 (1). Используя длинную точную последовательность гомотопических групп, покажите, что если $\pi_1(X) = \pi_2(X) = 0$, то $\pi_2(X/H) = \pi_1(H)$.